1. Sia $\sim$ una relazione su un insieme X.
   (a) Dire quando $\sim$ è una relazione di equivalenza.
   (b) Dare un esempio di relazione di equivalenza.
   (c) Dire che cos'è un sistema di rappresentanti.
2. Sia G un gruppo finito e sia $N \lhd G$, $H \leq G$. Dimostrare che $|NH| = |N| \cdot |H|/|N \cap H|$.
3. Si consideri il gruppo S_4 e il suo sottogruppo normale V_4. Dimostrare che $S_4/V_4 \simeq S_3$.
   (Suggerimento: trovare $H \leq G$ tale che $H \simeq S_4/V_4$ usando l'esercizio 2.)
4. Enunciare il teorema di Cayley.
5. (a) Dare la definizione di G-insieme per un gruppo G.
   (b) Sia $G = S_3$. Dare un esempio di G-insieme X con $|X| = 5$.
   (c) Per $G = S_3$ esiste un G-insieme transitivo X con $|X| = 5$?

1. (a) Dare la definizione di dominio euclideo. (2pt)
   (b) Dare due esempi di dominio euclideo. (2pt)
   (c) Dare la definizione di dominio principale. (2pt)
   (d) Dimostrare che euclideo implica principale. (6pt)

2. Sia K campo, sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\alpha \in \mathrm{End}_K(V)$. Dare la definizione di polinomio minimo di α. (2pt)

3. Sia $K := \mathbb{C}$ (campo dei numeri complessi), $V := \mathbb{C}^3$ e sia $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ una base di V. Sia α l'endomorfismo

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{e}_1) &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3,\\ \alpha(\mathbf{e}_2) &= 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,\\ \alpha(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

   (a) Calcolare il polinomio caratteristico di α. (3pt)
   (b) Trovare tutti gli autovalori di α. (3pt)
   (c) Trovare tutti gli autovettori di α. (3pt)
   (d) Trovare il polinomio minimo di α. (3pt)
   (e) Trovare la decomposizione di Fitting di α (ci sono due componenti U e W: dare una base di U e una di W). (4pt)
   (f) Trovare due polinomi f e g tali che per ogni $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$

$$\begin{aligned} f(\alpha)(\mathbf{u}) &= \mathbf{0}, & f(\alpha)(\mathbf{w}) &= \mathbf{w},\\ g(\alpha)(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}, & g(\alpha)(\mathbf{w}) &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

(6pt)

1. Sia G un gruppo; siano H, K sottogruppi di G e siano N, M sottogruppi normali di G.

   (a) $H \cap K$ è un sottogruppo di G.

   (b) $H \cap N$ è un sottogruppo normale di H.

   (c) (Definizione: se A e B sono sottoinsiemi di G, il loro prodotto è il sottoinsieme $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.)
   HN è un sottogruppo di G.

   (d) NM è un sottogruppo normale di G.

MATRICE   det(m) ≠ 0

2. Sia K un campo. $\mathrm{GL}_n(K)$ è l'insieme delle matrici invertibili su K. $\phi\colon S_n \to \mathrm{GL}_n(K)$, $\phi(\sigma) := (\delta_{i,\sigma(j)})$, è un omomorfismo iniettivo di gruppi.
   (RIGA COLONNA) (BIETTIVE) $S_n = (B_{ij}\{1..n\})$ $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det(A) \neq 0\}$ $\mathrm{Im}(\phi) = GL_n(K)$
   ($\delta_{i,j}$ è la funzione *delta di Kronecker*: $\delta_{i,j} := 1$ se $i = j$, $\delta_{i,j} := 0$ se $i \neq j$. L'immagine di ϕ è l'insieme delle *matrici di permutazione*.)

3. Sia H un sottogruppo di indice 2 di un gruppo G. Allora H è normale. (Suggerimento: quali sono i laterali di H in G?)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\sigma) = ? = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $\phi: G \to H$ $\phi(1_G) = 1_H$ $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$
   $\phi: S_n \to GL_n(K)$ $\phi(1_{S_n}) = 1_{GL_n(K)}$ ϕ

det

$\phi(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)}) = GL_n(K)$

1. Sia G un gruppo ciclico finito di ordine n. Dimostrare che per ogni divisore d di n esiste un sottogruppo H di G di ordine d.

2. Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo di G. Dimostrare: Se $|G : H| = n < \infty$, esiste un sottogruppo normale N di G contenuto in H tale che $|G : N|$ divide $n!$.

3. Sia A un gruppo abeliano e sia $C_2 = \{1, \sigma\}$ il gruppo ciclico di ordine 2. Dimostrare che $\varphi\colon C_2 \to \mathrm{Aut}(A)$, $\varphi(1) = id_A$, $\varphi(\sigma)(a) = a^{-1}$, $a \in A$, è un omomorfismo di gruppi.

da consegnare Giovedì 1 Aprile

1. (a) Si determini $d := \mathrm{MCD}(672, 876)$ tramite l'algoritmo di Euclide.
   (b) Usando quanto ottenuto prima, trovare una soluzione $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione $876x + 672y = d$.
   (c) Usando quanto ottenuto prima, trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{Z}$ del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} z \equiv 35 \pmod{876} \\ z \equiv -1 \pmod{672} \end{cases}$$

2. Sono dati i polinomi $p := x^2+x+2 \in \mathbb{Q}[x]$ e $q := x^2 \in \mathbb{Q}[x]$. Utilizzando l'algoritmo di Euclide stabilire se p e q sono primi tra loro e in caso affermativo determinare $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $ap + bq = 1_{\mathbb{Q}[x]}$.

3. Sia α un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo complesso. Dimostrare che ogni radice del polinomio caratteristico di α è una radice del suo polinomio minimo.

4. Sia α un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo K. Se $m \in \mathrm{MIrr}(T)$ è un polinomio monico irriducibile a coefficienti in K la sua *componente di Fitting* è $V_m := \{ v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 \; m^k(\alpha).v = 0 \}$. Sia k_m il minimo intero in $\mathbb{N}_0$ tale che $V_m = \ker(m(\alpha)^{k_m})$. Dimostrare che $\min_\alpha = \prod_{q \in \mathrm{MIrr}(T), V_q \neq 0} q^{k_q}$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{C}$. Trovare il polinomio minimo dell'endomorfismo definito, rispetto ad una base fissata, dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$